OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a IX-a
Soluţii şi bareme

SUBIECTUL I

a) Ecuaţia poate fi scrisă de forma $x + 5 = \left(2[x] + 1\right) \cdot \left[\frac{x^2+2x+3}{x+2}\right]$, $x \neq -2$, de unde observăm că $x \in \mathbf{Z}$. Atunci, $[x] = x$ şi $\left[\frac{x^2+2x+3}{x+2}\right] = x + \left[\frac{3}{x+2}\right]$, iar ecuaţia poate fi rescrisă sub forma $x + 5 = (2x + 1) \cdot \left(x + \left[\frac{3}{x+2}\right]\right)$.....2p

Observăm $x = 1$ soluţie. Pentru a demonstra că este unică, vom analiza cazurile:

1. $x > 1$, atunci $0 < \frac{3}{x+2} < 1$, deci $\left[\frac{3}{x+2}\right] = 0$. Ecuaţia devine $2x^2 = 5$ şi nu are soluţii întregi.
2. $x < -5$, atunci $-1 < \frac{3}{x+2} < 0$, deci $\left[\frac{3}{x+2}\right] = -1$. Ecuaţia devine $x^2 - x - 3 = 0$ şi nu are soluţii întregi.
3. $x \in \{-5, -4, -3, -1, 0\}$ care nu verifică ecuaţia dată.

Prin urmare, $x = 1$ soluţie unică.....3p

b) Fie O un punct arbitrar al planului. Atunci, pentru $a+b = 1$, relaţia $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{BA}+b\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ devine $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA} = a(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+(1-a)(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$, adică $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{CA}$ ceea ce justifică faptul că punctele A, B, C sunt coliniare.....2p

SUBIECTUL II

Dacă $\triangle ABC$ este echilateral bisectoarele, sunt mediane, deci
$2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $2\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$, $2\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA} \Longrightarrow 2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$.........................3p

Reciproc, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{0}$. Notăm $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Atunci $\overrightarrow{AD} = \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{c\overrightarrow{BC}+a\overrightarrow{BA}}{a+c}$, $\overrightarrow{CE} = \frac{a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}}{b+a}$...............1p

$$(b^2 - a^2)c\overrightarrow{AB} + (c^2 - b^2)a\overrightarrow{BC} + (a^2 - c^2)b\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}.$$

Dar, $\overrightarrow{CA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$ si astfel

$$(b^2c - a^2c - ba^2 + bc^2)\overrightarrow{AB} + (ac^2 - ab^2 - ba^2 + bc^2)\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}.........1p$$

Cum $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ necoliniari $\Longrightarrow a^3 = b^3$ si deci $\triangle ABC$ este echilateral.....2p

SUBIECTUL III

a) $x_3 = \sqrt{3}$ şi $x_4 = \sqrt{3\sqrt{3}+1}$.........1p;

b) $x_3 < 2$, $x_4 < 3$..............1p

Presupunem $x_{n-1} < n-2$, $x_n < n-1$ şi demonstăm $x_{n+1} < n$.

$$x_{n+1} = \sqrt{nx_n + x_{n-1}} = \sqrt{n^2-2} < n........2p$$

c) Demonsrtăm $x_n > n-2$, $(\forall) n \geq 3$.

$x_3 = \sqrt{3} > 1$, $x_4 = \sqrt{3 \cdot 1 + 1} > 2$, $x_5 = \sqrt{4 \cdot 2 + 1} > 3$.......1p

Presupunem $x_{n-1} > n-3$, $x_n > n-2$ şi demonstăm $x_{n+1} > n-1$.

$$x_{n+1} = \sqrt{nx_n + x_{n-1}} = \sqrt{n^2-n-3} > n-1........2p$$

Dar $n-2 < x_n < n-1$, deci $x_n \notin \mathbf{N}$, $(\forall) n \geq 3$.........2p

SUBIECTUL IV

1. Folosim $(1+k)^3 = 1 + 3k + 3k^2 + k^3$....1p
   Sumând apoi pentru valori ale k de la 1 la n, obţinem $(n+1)^3 = (n+1) + 3S + 3\frac{n(n+1)}{2}$, de unde găsim $S = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.....3p

2. Cum $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1(2n+1)}{6}$, avem:

$$0 \geq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} kx_k + \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - k)^2 \geq 0, ...2p$$

   de unde $x_k = k$.....1p